L'architetto Guarino Guarini ed una dimostrazione del teorema delle corde in 3D

Biografia

Guarino Guarini nacque il 17 gennaio 1624 a Modena, oltre ad essere stato un architetto e teorico dell'architettura si è occupato anche di filosofia e di matematica. Compì i primi studi insieme ai cinque fratelli nella città natale, precisamente presso la casa dei chierici regolari teatini. Quello degli ordini religiosi era un ambiente saturo di fermenti scientifici che favoriva la diffusione della cultura dell'architettura; Guarini non fu affatto immune a questo influsso tanto che, seguendo le orme del fratello maggiore Eugenio, nel settembre 1639 entrò nell'Ordine dei Teatini. Il 22 ottobre 1639 si trasferì, per il noviziato, a Roma nel convento di San Silvestro al Quirinale, dove studiò fino al 1647 teologia, filosofia, matematica e architettura. Nel febbraio del 1645 Guarini si recò a Venezia, ospite del convento di San Nicola dei Tolentini, dove approfondì gli studi teologici e fu nominato suddiacono. Nel 1647 conclusi gli studi tornò nella città natale. Nel gennaio dell'anno successivo fu ordinato sacerdote e revisore dei conti della casa teatina, ufficio che a sua volta gli valse la sovrintendenza dei lavori alla nuova Casa dell'Ordine e per la chiesa di San Vincenzo, iniziata nel 1617 da Paolo Reggiani e ormai prossima al completamento e per le quali è stato ipotizzato un suo intervento progettuale. In questo periodo approfondì lo studio degli aspetti teorici dell'architettura. Nel 1655 fu eletto preposto della Casa Teatina modenese, ma a tale carica fu costretto a rinunciare per le ostilità manifestate dal futuro duca d'Este Alfonso IV, e in seguito ritenne opportuno lasciare Modena. Il decennio tra il 1655 e il 1666 fu caratterizzato da viaggi, anche fuori dall'Italia, che gli permisero di maturare la conoscenza di culture architettoniche diverse. Nel biennio 1660-1662 si recò a Messina dove, oltre ad insegnare alla scuola dei Teatini, a coltivare i propri interessi matematici e letterari e a far stampare *La Pietà trionfante* (1660), si occupò di architettura: progettò e realizzò la chiesa della Santissima Annunziata, la Casa dei Teatini, la chiesa dei Padri Somaschi e il completamento della Chiesa di San Filippo Neri. Purtroppo tutte queste costruzioni sono andate distrutte durante il terremoto del 1908. Nel 1662 Guarini si recò a Parigi, ove fu incaricato di dirigere i lavori per la chiesa teatina di Sainte Anne la Royale, il cui cantiere era già stato iniziato da Maurizio Valperga. Guarini cambiò sostanzialmente il progetto e, tra molte difficoltà, realizzò, senza portarlo a compimento, l'edificio oggi perduto in quanto definitivamente demolito nel 1823. In Francia l'architetto ebbe modo di estendere le proprie conoscenze manifestando interesse per l'architettura gotica, l'opera di Mansart e per le ricerche sulla geometria proiettiva di Girard Desargues. A Parigi insegnò teologia e pubblicò i *Placita philosophica physicis rationibus experientiis, matemathicisque ostensa* (1665), compendio delle sue ricerche in campo fisico, astronomico, filosofico e metafisico, in cui dichiara la sua adesione alla concezione geocentrica dell'universo e il rifiuto della cosmologia di Copernico e Galileo. Nel 1666 ritornò a Torino, dove rimase fino al 1681 come ingegnere e matematico di Carlo Emanuele II, Duca di Savoia e Principe del Piemonte. In Piemonte, Guarini realizzò diversi lavori architettonici che lo portarono alla fama in Italia e in Europa, come la Cappella della Sacra Sindone, Palazzo Carignano, la Chiesa di San Filippo e la Chiesa teatina di San Lorenzo. Durante il lungo soggiorno torinese compì alcuni viaggi in Europa, a Praga e a Lisbona, in particolare, in occasione di richieste di interventi. In questo periodo Guarini non si occupò solamente di architettura ma anche di argomenti teorici riguardanti la matematica e le discipline da essa derivate: geometria, astronomia e architettura. Nel 1671 per un breve periodo tornò a Modena, con il dovere di ritornare a Torino; a garanzia di quest'obbligazione lasciò a un libraio il manoscritto dell'*Euclides adauctus et methodicus mathematicaque universalis*; un compendio delle sue ricerche in campo matematico e geometrico, la cui *editio princeps* risale al 1671, alla quale seguirà la ristampa del 1676. L'atteggiamento ostile della Comunità modenese mutò solo nel 1672, quando Francesco II d'Este, figlio di Alfonso IV d'Este, premette su Guarini per indurlo a rientrare nella città natale, però l'architetto, preso dai cantieri della Sindone e di S. Lorenzo, rifiutò. Nel 1674 pubblicò *Modo di misurare le fabriche*, un manuale per agevolare il calcolo delle superfici e dei volumi. Successivamente, pubblicò *Compendio della sfera celeste* nel 1675, il *Trattato di fortificazione* nel 1676 e *Leges temporum et planetarum* nel 1678. Nel febbraio 1683 si recò a Milano per curare la stesura del volume *Coelestis mathematicae pars prima et secunda*, pubblicato postumo. Il sacerdote architetto scomparve a Milano il 6 marzo 1683. A tre anni dalla sua morte uscirono a Torino i *Disegni di architettura civile ed ecclesiastica* anticipazione dell'*Architettura civile*, un trattato architettonico pubblicato postumo a Torino nel 1737 a cura dei suoi confratelli teatini (e particolarmente di B. A. Vittone). Tale opera illustra i principi architettonici dell'autore e documenta con incisioni anche i progetti non realizzati e gli edifici scomparsi.

Figura 1: Ritratto calcografico di Guarino Guarini

Il ruolo della matematica nella vita di Guarini

Guarini è considerato da alcuni studiosi un intellettuale poliedrico: egli stesso si defininiva teologo, filosofo, matematico oltre che architetto e pare che proprio la matematica, al cui studio comincia ad avvicinarsi a Roma, dove si reca nel 1639 dopo essere entrato nell'ordine dei Teatini, lo abbia introdotto all'architettura. Durante la sua permanenza a Parigi (dal 1662 al 1666) Guarini ha modo di apprendere le teorie di Desargues, Pascal, Cartesio e Fermat e di coltivare un interesse che lo accomuna alla maggior parte dei matematici del Seicento, cioè quello per l'infinito e gli infinitesimi. Guarini scrisse inoltre una serie di trattati sulla matematica, sia in latino sia in italiano, tra cui *Euclides adauctus*. Nonostante ciò è naturale porsi la domanda se Guarini, architetto di indubbia fama, possa essere considerato a tutti gli effetti un matematico. Il suo contributo, paragonato con quello di altri personaggi italiani dell'epoca, quali Bonaventura Cavalieri (1598-1647) o Evangelista Torricelli (1608-1647), non appare determinante e questo è il motivo per cui il suo nome viene citato da pochi storici della matematica tra cui Chasles (1793-1880) in *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des metho-*

des en geometrie (1837), in merito agli studi sulle sezioni coniche e su temi che verranno sviluppati più tardi da Monge con la sua geometria descrittiva, e Gino Loria (1862-1954) che, in *Storia della geometria descrittiva* (1921), colloca i lavori di Guarini nelle fasi iniziali della costruzione di tale branca.

Euclides Adauctus

L'opera enciclopedica intitolata *Euclides adauctus et methodicus mathematicaque universalis* è considerata il lavoro più importante di Guarini nell'ambito della matematica. Tale scritto, dedicato a Carlo Emanuele II duca di Savoia e pubblicato a Torino nel 1671, è una sorta di summa di carattere didattico di oltre settecento pagine. Come ha affermato lo stesso Guarini in *Euclides*, nel *Modo di misurare le fabriche* e in *Architettura civile* il suo scopo era quello di far conoscere i risultati raggiunti nella geometria classica, come nelle opere di Euclide, Archimede, Apollonio e Pappo, ad esempio, in relazione alle curve e ai solidi di rotazione, ma anche a temi più moderni come gli indivisibili e i logaritmi. Le sue opere erano destinate a un pubblico di lettori colto ed esigente, ma nessuno specializzato in dimostrazioni matematiche sottili e complesse. Il suo pubblico comprendeva intellettuali e professionisti desiderosi di comprendere i fondamenti della geometria e aritmetica per applicarli, ad esempio, in campi come l'architettura, geodesia, architettura militare, gnomonica e astronomia. E' per questa ragione che nell'introduzione ai vari trattati che affrontano argomenti specifici menziona le possibili applicazioni per la particolare teoria. Ad esempio, secondo Guarini i poligoni regolari potevano essere utilizzati per costruire fortificazioni, le coniche per studiare il moto dei pianeti e per fabbricare lenti ardenti e meridiane; egli osservò che le proiezioni venivano usate nella gmomonica e nell'architettura, per costruire meridiane e strumenti matematici come l'astrolabio, e nella cosmografia.

EVCLIDES ADAVCTVS
ET METHODICVS
MATHEMATICAQ; VNIVERSALIS
CAROLO EMANVELI II.
SABAVDIAE DVCI PEDEMONTIVM PRINCIPI
REGI CYPRI, &c.
DICATA,
Quæ ne dum propositionum dependentiam, sed & rerum ordinem obseruat. Et complectitur ea omnia, quæ de quantitate tum discreta, tum continua abstracta speculari queunt. Resectis superfluis demonstrationibus, & requisitis omnibus profusè coadunatis.
Singuli quoque Tractatus nouis propositionibus adaucti sunt, & aliqui etiam ex integro adornati. Omnesque tùm figuris, tùm verbis clarè, dilucidèque propositi.
AVCTORE
D. GVARINO GVARINO
MVTINENSI C.R. THEATINO,
Philosofo, Theologo & eiusdem R. C. Mathematico.
AVGVSTÆ TAVRINORVM, M DC.LXXI.
Typis Bartholomæi Zapatæ Bibliopolæ S. R. C.
Superiorum permissu.

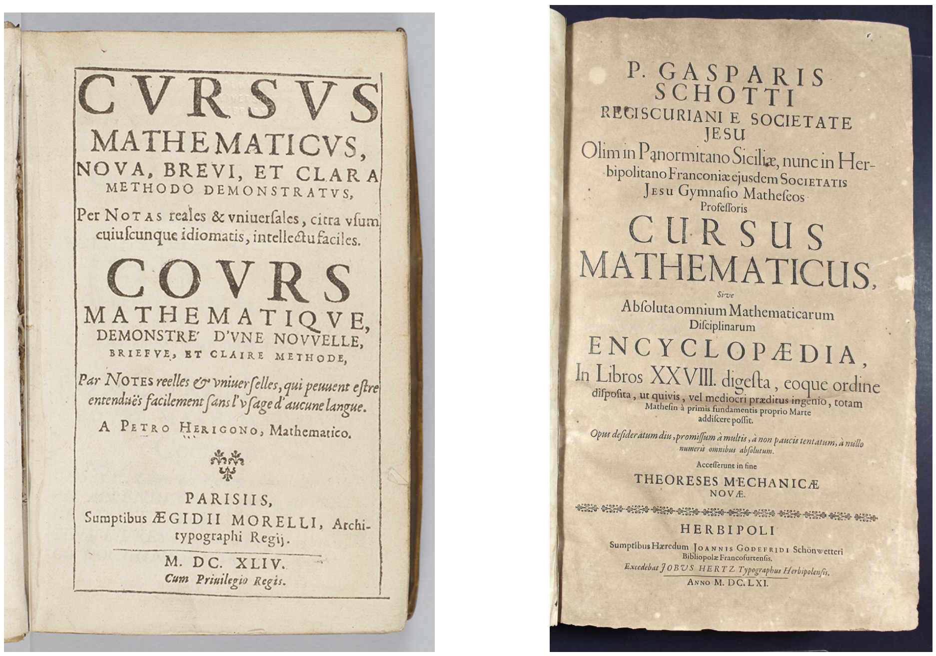
Figura 2: Frontespizio di *Euclides Adauctus* di Guarini

Nel frontespizio di *Euclides Adauctus* Guarini dichiara la natura della sua opera e i contenuti:

Euclides Adauctus et methodicus mathematicaque universalis dedicato a Carlo Emanuele II Duca di Savoia, Principe del Piemonte, Re di Cipro, etc., il quale non solo osserva la dipendenza delle proposizioni, ma anche l'ordine delle cose. Questo lavoro è anche completo di tutte quelle proprietà che possono essere osservate sia per quanto riguarda le quantità discrete che per quelle continue. Le dimostrazioni superflue sono state trascurate e tutte quelle importanti incluse; inoltre, i singoli trattati sono stati ampliati con nuove proposizioni e alcune parti sono state interamente riscritte. Tutto è illustrato in modo chiaro e preciso con figure e con parole. [1]

Nella prefazione ai "gentili lettori" Guarini usa una bella immagine metaforica delle ragioni per cui è stato condotto a comporre il suo trattato, ossia, la sua personale esperienza aveva confermato "il valore e l'utilità che questo genere di lavoro può avere per *irradiare con la luce matematica e rendere evidenti tutte le cose con una singola sorgente luminosa"*. [2]

Guarini nella stesura dell'opera è stato ispirato dalle raccolte enciclopediche intitolate *Cursus Mathematicus*, come quella di Pierre Hérigone (1580-1643), pubblicata a Parigi in sei volumi tra il 1634 e il 1642, e quella di Gaspar Schott (1608-1666), pubblicata a Würzburg in ventotto libri nel 1661. Nel *Cursus* Pierre Hérigone, ritenuto uno pseudonimo di Clément Cyriaque de Mangin, ha introdotto l'uso del simbolismo matematico. Alcuni simboli erano unici per quel tempo, ad esempio "$\perp$" per perpendicolare e "$\angle$" per angolo. Nel frontespizio della seconda edizione di *Cursus* l'autore promette che la raccolta fornirà matematica "nuova, concisa e chiara". Molto probabilmente Guarini è venuto a conoscenza dell'opera di Hérigone durante i suoi viaggi a Parigi, dove il matematico e astronomo francese era molto apprezzato come insegnante. Inoltre, si pensa che Guarini abbia avuto un contatto diretto con il Gesuita Schott in Sicilia, dove quest'ultimo insegnava al Ginnasio del Collegio dei Gesuiti a Palermo. Schott successivamente si trasferì a Würzburg, dove pubblicò, oltre al suo *Cursus Mathematicus*, i volumi intitolati *Mathesis Caesarea* (1662) e *Physica curiosa sive mirabilia naturae et artis* (1662), che mostravano il suo dilettarsi nello scrivere trattati di natura pratico-applicativa rivolti a un pubblico curioso, i cui vasti interessi includevano bussole e altre apparecchiature utilizzate per misurazioni in geodesia e poligrafia, cioè nella geometria applicata all'architettura militare, lo sparo di proiettili, problemi di tattiche militari, ottica, cambi di valuta, cronologia e il calcolo della data di Pasqua, meccanica, meteorologia, astronomia e architettura civile.



CVRSVS MATHEMATICVS, NOVA, BREVI, ET CLARA METHODO DEMONSTRATVS, Per NOTAS reales & vniuersales, citra vsum cuiuscunque idiomatis, intellectu faciles.

COVRS MATHEMATIQVE, DEMONSTRE' D'VNE NOVVELLE, BRIEFVE, ET CLAIRE METHODE, Par NOTES reelles & vniuerselles, qui peuuent estre entenduës facilement sans l'vsage d'aucune langue.

A PETRO HERIGONO, Mathematico.

PARISIIS, Sumptibus ÆGIDII MORELLI, Architypographi Regij. M. DC. XLIV. Cum Priuilegio Regis.

P. GASPARIS SCHOTTI REGISCURIANI E SOCIETATE JESU Olim in Panormitano Siciliæ, nunc in Herbipolitano Franconiæ ejusdem SOCIETATIS JESU Gymnasio Matheseos Professoris

CURSUS MATHEMATICUS, Sive Absoluta omnium Mathematicarum Disciplinarum ENCYCLOPÆDIA, In Libros XXVIII. digesta, eoque ordine dispofita, ut quivis, vel mediocri præditus ingenio, totam Mathesin à primis fundamentis proprio Marte addiscere possit.

Opus desideratum diu, promissum à multis, à non paucis tentatum, à nullo numeris omnibus absolutum.

Accesserunt in fine THEORESES MECHANICÆ NOVÆ.

HERBIPOLI Sumptibus Hæredum JOANNIS GODEFRIDI Schönwetteri Bibliopolæ Francofurtensis. Excudebat JOBUS HERTZ Typographus Herbipolensis, ANNO M. DC. LXI.

(a) (b)

Figura 3: Frontespizi dei trattati *Cursus Mathematicus* di Pierre Hérigone (a) e di Gaspar Schott (b).

Guarini sottolineò con orgoglio di aver evitato lo svantaggio di diffondere nozioni su molti volumi costosi e di aver raccolto i concetti e le proprietà in modo ordinato e in successione in un'unica opera, soprattutto per "chi non è in grado di tradurre le conoscenze più difficili nella propria lingua". Egli evidenziò la difficoltà che il lettore ordinario, ossia un matematico non professionista, affronterebbe se leggesse direttamente le opere di Apollonio di Perga, Archimede e Pappo.
Nonostante ciò il suo stile è pesante ed involuto. Per esempio, nel trattato XXI dedicato ai logaritmi, Guarini si servì di intere pagine per esporre cose molto semplici, per esempio quella che il logaritmo di un quadrato è il doppio del logaritmo della base. Naturalmente ciò dipende essenzialmente dalla totale mancanza del calcolo letterale e del linguaggio algebrico.
(F. G. Tricomi *Guarini matematico* in *Guarino Guarini e l'internazionalità*

del Barocco). Nel suo trattato, sebbene avesse consultato molti testi, escluse ciò che giudicava superfluo o inutile ed inoltre si limitò ad una scelta personale sugli argomenti da trattare ritenuti da lui più rilevanti. Al contrario in alcuni passaggi ampliò la portata di quella matematica, migliorando dimostrazioni e inserendone di mancanti. Era solito segnare le sue innovazioni e modifiche con asterischi posizionati sul margine sinistro del risultato.

In *Euclides Adauctus* Guarini rivela le sue eccellenti doti di insegnante, dichiarando lui stesso che imparò il modo di spiegare la matematica da Euclide e Proclo. Lo stile dell'opera infatti mostra una notevole sensibilità per la didattica, originalità e profondità nelle spiegazioni. (Clara Silvia Roero, *Guarino Guarini and Universal Mathematics.*)

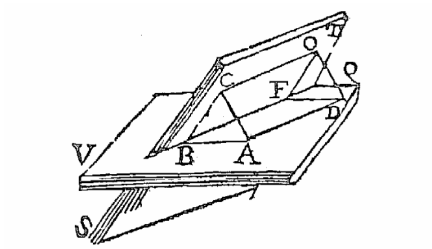
Struttura e contenuti dell'opera

Gli argomenti affrontati sono suddivisi in trentacinque libri o trattati (*tractatus*), che a loro volta sono suddivisi in capitoli (*expensio*), i quali includono definizioni, teoremi, proposizioni, corollari, commenti, problemi, costruzioni geometriche, indicazioni esplicite e puntuali sulle fonti, e occasionalmente anche assunzioni (*praeassumptum*) e conclusioni (*conclusio*). Inoltre fa spesso uso di grafici per aiutare a visualizzare meglio gli elementi presi in esame. Ogni trattato si apre con una prefazione in cui Guarini menziona i possibili usi pratici di quel particolare argomento per ingegneri, artigiani, costruttori di strumenti, architetti militari, geodetici e musicisti. Il modo in cui Guarini espone i concetti è più vicino a quello degli *Elementi di Euclide* rispetto a quello che si trova nei testi di Archimede e Apollonio, i quali erano rivolti a lettori altamente esperti. Circa metà dell'opera è dedicata ad argomenti puramente geometrici, tra cui un'analisi dei tredici libri di Euclide: è significativo osservare come Guarini, in un secolo in cui il ruolo dell'Algebra diventa sempre più rilevante, consideri la Geometria superiore rispetto agli altri rami della matematica. Il resto dell'*Euclides Adauctus*, tradotto come "Euclide Accresciuto", riguarda il calcolo dei logaritmi, sviluppato proprio all'inizio del Seicento da Briggs e Nepero, la trigonometria piana e sferica, astronomia e si chiude con una serie di tavole numeriche.

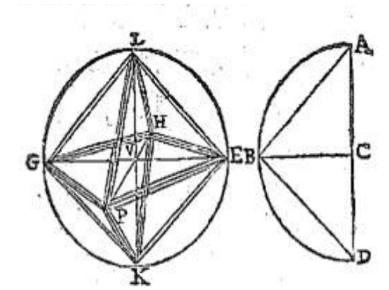
I primi tre trattati dell'*Euclides Adauctus* reintroducono argomenti di natura filosofica già affrontata nella *Placita Philosophica* riguardo l'esistenza di quantità continue, quantità discrete, indivisibili, l'infinito e caratteristiche della matematica. Nel terzo trattato Guarini affronta le proprietà della disciplina della matematica, e dedica particolare attenzione al suo aspetto filologico e alla terminologia utilizzata dagli antichi, come Pappo e Proclo, e dai matematici più moderni, come Cristoforo Clavio, Pierre de la Ramée, Girolamo Vitali. Discute anche l'importanza dell'insegnamento della matematica.

Essa insegna solo attraverso dimostrazioni (per ostensionem), e dichiara di essere provato solo ciò che è evidente e dedotto da principi. La matematica è una scienza ostensiva il cui oggetto è tutto ciò che è misurabile. [Guarini 1671: pg. 22].

Guarini nei trattati IV-XII presenta e dimostra le proposizioni esposte da Euclide nei libri I-VII e X degli *Elementi.* Nei trattati XXII e XXXIII considera la geometria solida, l'intersezione dei piani e l'iscrizione dei cinque poliedri regolari nella sfera, temi affrontati da Euclide nei suoi libri XI, XII e XIII. Per il libro V degli *Elementi*, dedicato alla teoria delle proporzioni, Guarini riserva i trattati VIII e IX, nei quali affronta le operazioni aritmetiche e le proporzioni tra segmenti. Nel trattato VII viene data particolare attenzione alle costruzioni con riga e compasso, ad esempio, per costruire la bisettrice di un angolo, la perpendicolare o parallela a una data linea, le iscrizioni e circoscrizioni di poligoni regolari nel cerchio. Mentre nel trattato XII affronta le grandezze incommensurabili e i numeri irrazionali, argomento esposto nel decimo libro di Euclide. Invece, le operazioni che coinvolgono le frazioni e le regole comunemente usate per risolvere alcuni problemi di aritmetica, come la sezione aurea, la regola del tre semplice e composta, l'algoritmo per l'estrazione della radice quadrata e cubica, sono esaminate nel trattato XIII.



(a) Guarini 1671, Tract. XXII, Def. IV.

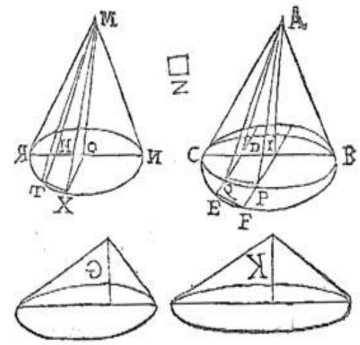


(b) Guarini 1671, Tract. XXXIII, Exp. IV, Probl I, Prop. VII.

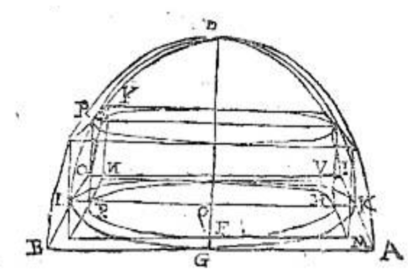
Figura 4: Esempi di grafici raffiguranti l'intersezione tra due piani e l'iscrizione di un ottaedro in una sfera.

Per scrivere tutti questi trattati Guarini utilizzò come fonti: le edizioni in latino degli *Elementi di Euclide* a cura di Christopher Clavius e Francesco Commandino, e quelle in italiano di Niccolò Tartaglia. Inoltre, l'architetto consultò anche testi antichi sulla trigonometria sferica di Teodosio, Tolomeo, Menelao, Copernico e Regiomontano. Tuttavia, nel corso dell'opera citò anche autori, a lui contemporanei, di manuali di geometria, come Giovanni Antoni Magini, Mario Bettini, Cristoforo Clavio e Giambattista Benedetti, in riferimento alle costruzioni geometriche elementari con il compasso.

Infine, Guarini dedica il trattato XV alla costruzione del segmento medio proporzionale tra due segmenti dati [Guarini 1671: Tract. XV, *De linearum, segmentorumque proportionibus*, pp. 248-255]; il trattato XVIII allo studio e costruzione di alcune curve [Guarini 1671: *De flexis*, pp. 286-299]; e i trattati XXIV e XXV allo studio delle sezioni coniche di Apollonio [Guarini 1671: pp. 390-443]. La determinazione delle aree di alcune figure con perimetro curvilineo è oggetto del trattato XXX, in cui Guarini cita la storia del problema della quadratura del cerchio e dei risultati proposti dagli antichi filosofi, come Antifona, Brisone di Eraclea, Ippocrate di Chio e Archimede, e da quelli moderni come Oronzio Fineo, Nicola Cusano, Gregorio De Saint Vincent, Vincent Leotaud e Xavier Franciscus Ayscon [Guarini 1671: pp. 527-549]. Per determinare l'area di una figura qualsiasi illustra il metodo classico dell'esaustione, in aggiunta conferma il risultato di Archimede sulla misura del cerchio e sull'approssimazione per π (cioè la relazione tra la circonferenza e il diametro). Inoltre, determina la superficie di un anello circolare, il triangolo di massima area inscritto nell'ellisse, l'area di un segmento di parabola trovato da Archimede, l'approssimazione dell'area di un segmento di iperboloide. Nei trattati XXXI e XXXII Guarini si occupa delle superfici e dei volumi di prismi, cilindri, coni, coni troncati, sferoidi ellittici e sfere [Guarini 1671: pp. 550-571] e la loro proiezione sul piano [Guarini 1671: 572-596]. Mentre, negli ultimi due trattati di *Euclides Adauctus* e nell' *Appendix*, aggiunta all'opera poco dopo il 1671, l'architetto e matematico si occupa di superfici e volumi di corpi che non sono stati affrontati da altri matematici, come coni ellittici, semisfere con "base quadrata".



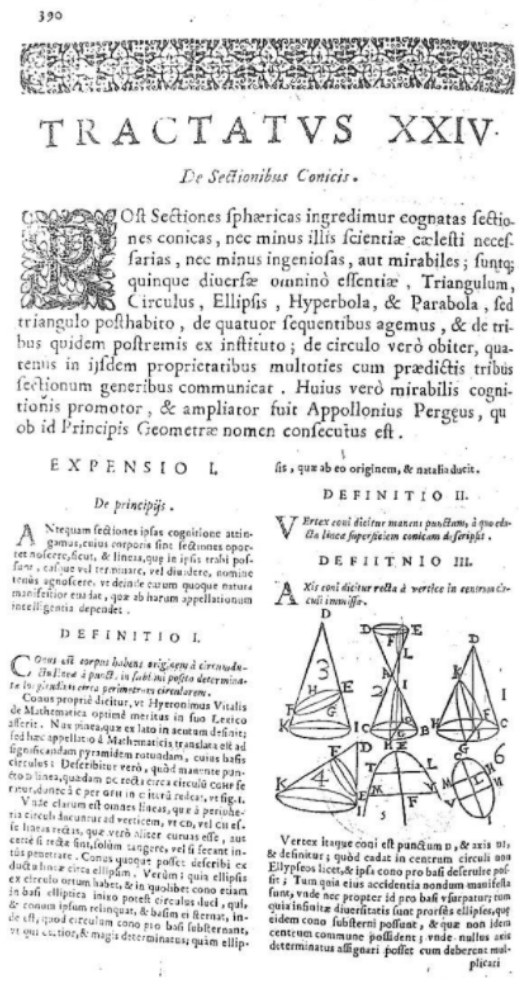
(a) Coni ellittici.
Guarini 1671, Tract. XXXIV, Exp. IV, Th. III, Prop. XXVIII.



(b) Semisfera con base quadrata.
Guarini 1671, Tract. XXXIV, Theor. I, Prop. XLVIII.

Sezioni coniche

Il tema delle sezioni coniche viene principalmente affrontato nel trattato XXIV, nel quale Guarini segue la teoria classica di Apollonio, con definizioni, teoremi, proprietà delle tangenti, asintoti, e i famosi risultati di Archimede riguardanti la parabola e i solidi di rotazione e quelli di Gregorio De Saint Vincent in *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*, pubblicato nel 1647.



390

TRACTATVS XXIV.

De Sectionibus Conicis.

POst Sectiones sphæricas ingredimur cognatas sectiones conicas, nec minus illis scientiæ cælesti necessarias, nec minus ingeniosas, aut mirabiles; suntq; quinque diuersæ omninò essentiæ, Triangulum, Circulus, Ellipsis, Hyperbola, & Parabola, sed triangulo posthabito, de quatuor sequentibus agemus, & de tribus quidem postremis ex instituto; de circulo verò obiter, quatenus in ijsdem proprietatibus multoties cum prædictis tribus sectionum generibus communicat. Huius verò mirabilis cognitionis promotor, & ampliator fuit Appollonius Pergæus, qu ob id Principis Geometræ nomen consecutus est.

EXPENSIO I.

De principijs.

ANtequam sectiones ipsas cognitione attingamus, cuius corporis sint sectiones oportet noscere, sicut, & lineas, quę in ipsis trahi possunt, easque vel terminare, vel diuidere, nomine tenùs agnoscere, vt deinde earum quoque natura manifestior euadat, quæ ab harum appellationum intelligentia dependet.

DEFINITIO I.

COnus est corpus habens originem à circumducta linea à puncto in sublimi posito determinate longitudinis circa perimetrum circularem.

Conus propriè dicitur, vt Hyeronimus Vitalis de Mathematica optimè meritus in suo Lexico asserit. Nux pinea, quæ ex lato in acutum desinit; sed hæc appellatio à Mathematicis translata est ad significandam pyramidem rotundam, cuius basis circulus: Describitur verò, quòd manente puncto D linea, quædam DC recta circa circulū conferatur, donec à C per GFH in circulū redeat, vt fig. 1.

Vnde clarum est omnes lineas, quæ à peripheria circuli ducuntur ad verticem, vt CD, vel CH esse lineas rectas, quæ verò aliter curuas esse, aut certè si rectæ sint, solùm tangere, vel si secant intùs penetrare. Conus quoque posset describi ex ductu lineæ circa ellipsim. Verùm quia ellipsis ex circulo ortum habet, & in quolibet cono etiam in basi elliptica inixo potest circulus duci, qui, & conum ipsum relinquat, & basim ei sternat, inde est, quod circulum cono pro basi substernant, vt qui certior, & magis determinatus; quàm ellipsis, quæ ab eo originem, & natalia ducit.

DEFINITIO II.

VErtex coni dicitur manens punctum, à quo ducta linea superficiem conicam descripsit.

DEFIITNIO III.

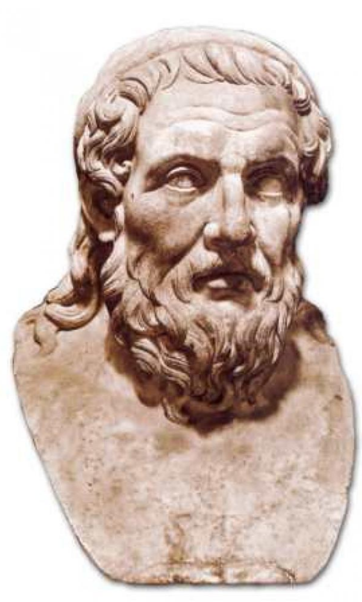
AXis coni dicitur recta à vertice in centrum circuli immissa.

Vertex itaque coni est punctum D, & axis DI, & definitur; quòd cadat in centrum circuli non Ellypseos licet, & ipsa cono pro basi deseruire possit; Tum quia eius accidentia nondum manifesta sunt, vnde nec propter id pro basi vsurpatur; tum quia infinitæ diuersitatis sunt prorsùs ellipses, quę eidem cono substerni possunt, & quæ non idem centrum commune possident; vnde nullus axis determinatus assignari posset cum deberent multiplicari

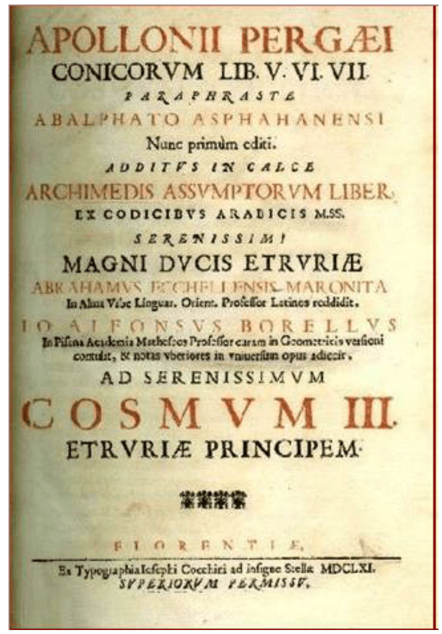
Figura 5: trattato XXIV

Guarini all'inizio del trattato XXIV afferma di voler continuare l'opera passando allo studio delle sezioni coniche, avvisando il lettore che questa parte non è meno importante della precedente sulla sfera, che lui chiama "*illis scientia caelesti*". Inoltre, sostiene di voler analizzare la parabola, l'ellisse e l'iperbole come aveva fatto il suo predecessore Apollonio di Perga, ossia in modo separato, tuttavia enuncia di aver approfondito e trattato in modo più avanzato la tematica.

Di Apollonio si sa che era nato a Perga, in Pamfilia (Asia Minore meridionale), e che aveva ricevuto la sua educazione scientifica ad Alessandria. Per un certo periodo visse anche a Pergamo, dove c'era una Accademia e una biblioteca che in ordine di importanza veniva immediatamente dopo quella del Museo di Alessandria. Non conosciamo con esattezza le date della sua vita, ma la tradizione riferisce che egli fu attivo durante i regni di Tolomeo Evergete e Tolomeo Filipatore: è stata avanzata l'ipotesi che sia vissuto dal 262 al 190 a.C.. L'opera che ha fatto sì che Apollonio diventasse noto come "il Grande Geometra" è intitolata le Coniche. Tale trattato è suddiviso in otto libri, solo i primi quattro ci sono pervenuti nel testo originale greco; i tre successivi invece sono giunti a noi tramite una traduzione araba. Le sezioni coniche erano già note da un secolo e mezzo quando Apollonio compose questo celebre trattato su queste curve, ma probabilmente nessuna opera precedente (neppure le *Coniche* di Euclide) aveva raggiunto un livello così alto. Prima di Apollonio l'ellisse, la parabola e l'iperbole venivano costruite come sezioni di tre tipi nettamente distinti di coni circolari retti, a seconda che l'angolo al vertice fosse acuto, retto o ottuso. Apollonio, per la prima volta, dimostrò che non era necessario prendere sezioni perpendicolari ad un elemento del cono e che da un unico cono era possibile ottenere tutte e tre le varietà di sezioni coniche semplicemente variando l'inclinazione del piano di intersezione. Una seconda importante generalizzazione si ebbe quando Apollonio dimostrò che non era necessario che il cono fosse un cono retto, ma che poteva essere anche un cono circolare obliquo o scaleno. Infine, Apollonio avvicinò ulteriormente le antiche curve al punto di vista moderno sostituendo il cono a una falda con un cono a doppia falda. Questo cambiamento fece sì che l'iperbole assumesse la forma di quella curva a due rami che ci è oggi familiare. I matematici antichi parlavano spesso di "due iperboli" piuttosto che di "due rami" di un'unica iperbole, ma in entrambi i casi si riconosceva la duplicità della curva. Fu Apollonio ad introdurre i termini "ellisse", "iperbole" e "parabola" in relazione alle sezioni coniche.



(a) Apollonio di Perga.



APOLLONII PERGÆI
CONICORVM LIB. V. VI. VII.
PARAPHRASTE
ABALPHATO ASPHAHANENSI
Nunc primùm editi.
ADDITVS IN CALCE
ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER.
EX CODICIBVS ARABICIS MSS.
SERENISSIMI
MAGNI DVCIS ETRVRIÆ
ABRAHAMVS ECCHELLENSIS MARONITA
In Alma Vrbe Linguar. Orient. Professor Latinos reddidit.
IO. ALFONSVS BORELLVS
In Pisana Academia Matheseos Professor curam in Geometricis versioni contulit, & notas vberiores in vniuersum opus adiecit.
AD SERENISSIMVM
COSMVM III.
ETRVRIÆ PRINCIPEM.
FLORENTIÆ,
Ex Typographia Iosephi Cocchini ad insigne Stellæ MDCLXI.
SVPERIORVM PERMISSV.

(b) Frontespizio dell'opera *Coniche* di Apollonio di Perga.

Il trattato XXIV dell'opera *Euclides Adauctus* è composto da ventuno capitoli, il primo dei quali si intitola "I principi" (*De principiis*), e si articola in quindici definizioni riguardanti il vertice di un cono, l'asse del cono, la parabola, l'ellisse e l'iperbole. Nei restanti capitoli Guarini approfondisce lo studio delle coniche enunciando teoremi e fornendo dimostrazioni avvalendosi anche di costruzioni. Apollonio, come i suoi predecessori, derivò le sue curve da un cono situato in uno spazio tridimensionale, ma si sbarazzò del cono non appena gli fu possibile, al contrario Guarini continuò ad utilizzare il cono per dimostrare alcuni importanti risultati. Il testo presenta alcuni errori nella numerazione dei capitoli, inoltre c'è una discordanza tra i termini utilizzati nell'indice del trattato all'inizio dell'opera e in quello all'interno del volume.

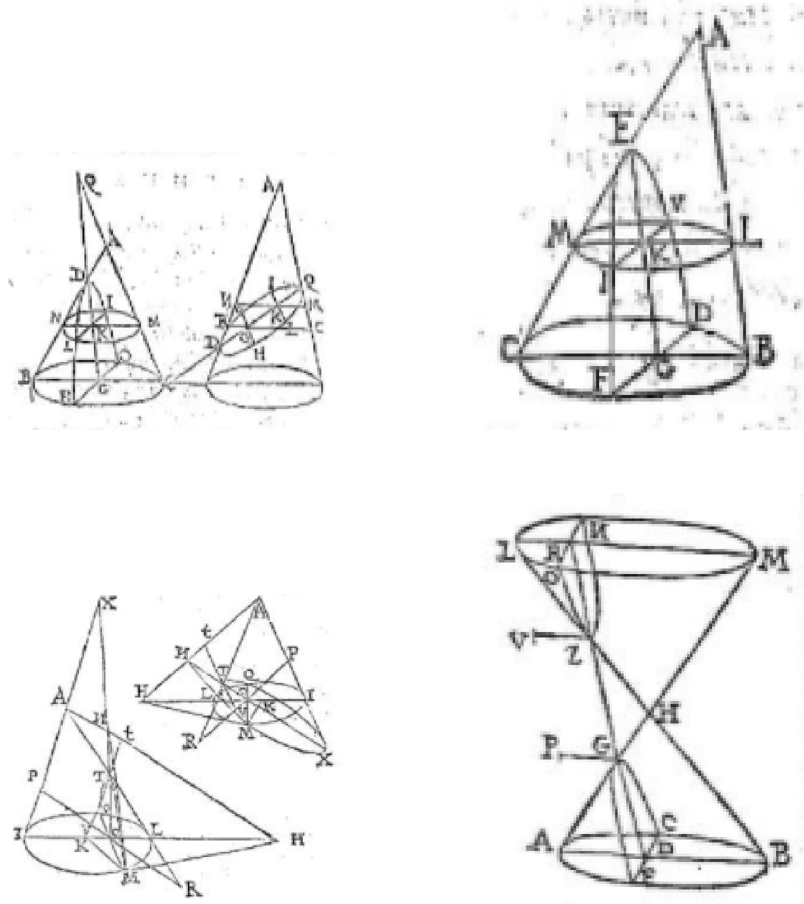


Figura 6: Alcune costruzioni utilizzate da Guarini nel trattato XXIV per dimostrare teoremi.

TRACTATUS XXIV: De sectionibus conicis

Expensio I. De principiis: 390-392.
Expensio II. De Diametro: 392-393.
Expensio III. De Parametro: 394-397.
Expensio IV. De Tangentibus: 398-400.
Expensio V. De interceptis diametri portionibus inter contingentem et alia puncta in ipso impressa: 400-403.
Expensio VI. De Umbelicis: 404.
Expensio VII. De rectis inclinatis aut contactibus ad umbelicos [focos]: 405-407.
Expensio VIII. De diametris secundis: 408-413.
Expensio IX. De sectionum aequalitate: 413-414.
Expensio X. De parallelis ad diametrum sectionis aut vertice coni ductis: 414-415.
Expensio XI. De Asymptoto Hyperbolarum proprietate: 416-419.
Expensio XII. De lineis in sectionibus utcumque ductis applicatas, seu parallelas secantibus: 419-420.
Expansio XIII. De similitudine figurarum: 420-422.
Expensio XIV. De descriptione universali sectionum: 422-425.
Expensio XV. De circumscriptione figurarum conicarum: 425-426.
Expensio XVI. De parabolis specialiter describendis: 426.427.
Expensio XVII. De Hyperbularum particulari descriptione: 427-429.
Expensio XVIII. De descriptione particulari Ellipsium: 429-430.
Expensio XIX. Sectiones omnes describere ope parallelogrammi: 430-431.
Expensio XX. De transumptione figurarum conicarum aut [ex] circulo: 431-433.
Expensio XXI. De mutua figurarum [sectionum] transumptione: 433-435. [1]

[1] I termini usati nell'indice all'interno del trattato XXIV sono poste tra parentesi quadre.

Dimostrazione del teorema delle corde

Lo storico della matematica Michel Chasles, nel suo testo *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des methodes en geometrie*, commenta il metodo di Guarini:

Notiamo soprattutto una dimostrazione estremamente semplice, e che si applica contemporaneamente alle tre sezioni coniche, della proprietà del rapporto costante dei prodotti dei segmenti realizzati sulle corde parallele, che aveva sempre richiesto la conoscenza di alcune proposizioni preliminari. [3]

In *Euclides Adauctus*, Guarini enuncia il teorema delle corde per sezioni coniche nella seguente forma [1671, XXIV, prop. 48]:

Se in una sezione conica viene tracciata una qualsiasi retta che interseca due rette parallele, il rettangolo fatto con i segmenti intercettati da una, sta al rettangolo fatto con i segmenti intercettati dall'altra, come il rettangolo fatto con i segmenti intercettati da una sta al rettangolo fatto con i segmenti intercettati dall'altra parallela.

Possiamo riformulare l'affermazione come segue:

Data una sezione conica TOS e una corda OM, e altre due corde parallele tra loro, QE e TS, che incontrano OM in I e in V rispettivamente, allora

$$\frac{MV \times VO}{MI \times IO} = \frac{TV \times VS}{EI \times IQ}.$$

Guarini per dimostrare il teorema appena enunciato si avvale della proposizione 29 [1671, XXIV, prop. 29, 410], nella quale mostra che data una coppia di corde parallele di una conica (e quindi un diametro della conica stessa), la conica può essere ottenuta come sezione di un opportuno cono circolare in modo tale che le due corde siano parallele al piano di base. Quindi, per provare il teorema delle corde, Guarini suppone le corde QE e TS parallele alla base del cerchio del cono CAB (Figura 7a), e suppone che la corda OM venga tagliata dal piano CKL. Successivamente, si prende il piano parallelo al piano di base attraverso la retta QE che taglia il cono lungo il cerchio $QPED$, allo stesso modo si prende il piano attraverso TS tagliando il cono lungo il cerchio $SLTK$. Il piano CKL taglia, su questi cerchi, le corde DP e KL. In base al teorema delle corde per il cerchio (prop. 35, libro III, *Elementi* di Euclide), si ha che $LV \times VK = TV \times VS$ e $PI \times ID = EI \times IQ$, mentre dalla similitudine dei triangoli MVL con MIP e KOV con DOI si ricavano le seguenti equivalenze $PI : LV = MI : MV$ e $ID : VK = OI : VO$ (Figura 7b), di conseguenza

$$\frac{PI \times ID}{LV \times VK} = \frac{EI \times IQ}{TV \times VS} \qquad \frac{PI \times ID}{LV \times VK} = \frac{MI \times OI}{MV \times VO}$$

da cui segue la tesi.

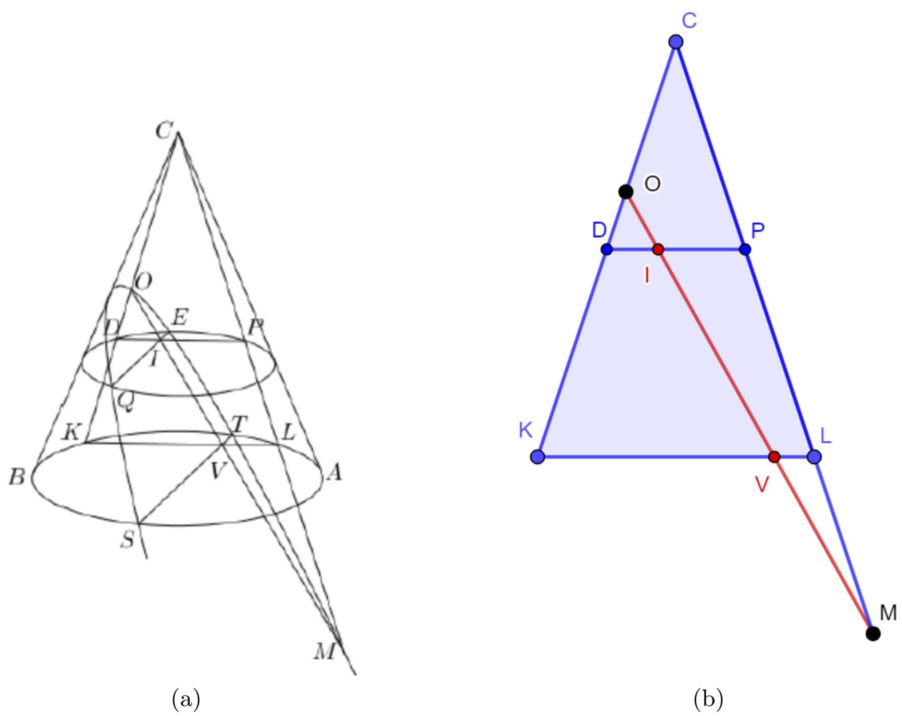


Figura 7: **a)** Il diagramma corrisponde alla prima figura di tre, che Guarini fornì per la dimostrazione del teorema delle corde [Guarini 1671, 419].
b) Sezione del cono mediante il piano KLC.

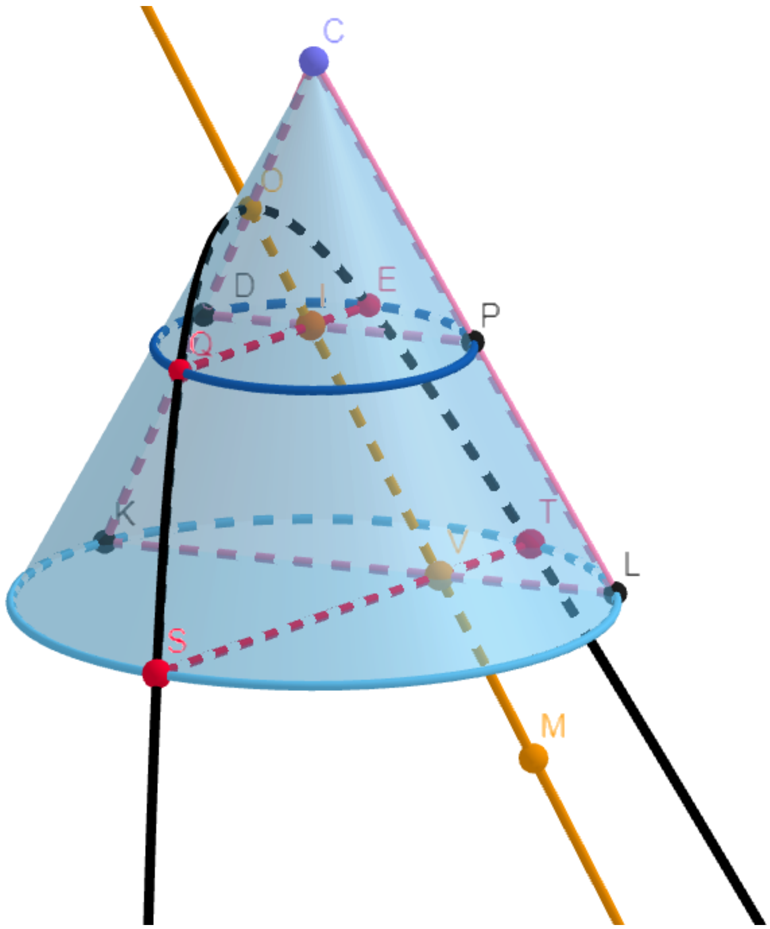


Figura 8: Costruzione utilizzata per dimostrare la proposizione 48.

Successivamente nella proposizione 49, [1671, 420], Guarini enuncia il teorema delle corde per sezioni coniche nella forma seguente:

Se date due coppie di corde parallele AB, KL e TV, CD di una sezione conica, in modo che AB, TV si incontrano in H e KL, CD si incontrano in F, allora

$$\frac{AH \times HB}{KF \times FL} = \frac{TH \times HV}{CF \times FD}$$

Per dimostrare quest'ultimo risultato, Guarini traccia la corda ZX passante per i punti F e H (Figura 8), dal teorema precedente si ottiene

$$\frac{AH \times HB}{KF \times FL} = \frac{ZH \times HX}{ZF \times FX}; \qquad \frac{TH \times HV}{CF \times FD} = \frac{ZH \times HX}{ZF \times FX}$$

da cui segue immediatamente il risultato.

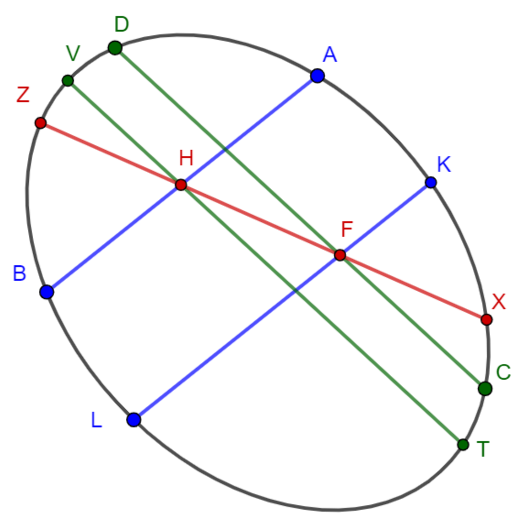


Figura 9: Costruzione per la dimostrazione della proposizione 49.

La dimostrazione di Guarini del teorema delle corde, nascosta in un libro di oltre settecento pagine, su vari aspetti della matematica pura e applicata, probabilmente sfuggì all'attenzione dei geometri del suo tempo.

hoc quadratum ex AH, vel ei æquali ad alteram partem, vtpote ex dimidio eius latere est quarta pars quadrati, quod fecimus, æquale dicto ex diametro transuersa, & parametro rectangulo; Ergo etiam huius rectanguli quarta pars erit, & consequenter erit linea, per cuius extremum à vertice sectionis è centro transibit Asymptotus, quod facere oportebat.

EXPENSIO VII.

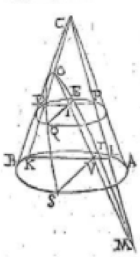
De lineis in sectionibus, vtcumque ductis applicatas, seu parallelas secantibus.

NOs hanc doctrinam faciliter trademus, cùm alij, non nisi post multas præuias propositiones, à quibus dependet, tradant, & non de omnibus simul, sed de singulis, vt videre est apud Ambrosium Vincentium virum in Mathematicis admirabilem, in quo quædam etiam desumemus in sequentibus.

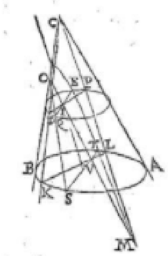
THEOR. I. PROP. XLVIII.

* *Si in sectione Conica qualibet, quæcumque ducta secet duas parallelas in ipsa sectione, rectangulum ex segmentis illius interceptis ab vna erit ad rectangulum ex interceptis ab alia segmentis, vt rectangulum ex segmentis vnius ad rectangulum ex segmentis alterius parallelarum.*

*SIt conus ABC, & triangulum LKC à vertice descendens; at non per axem, & in sectione TOS faciat sectionem MO, sintque sectiones effectę à circulis parallelis in illa parallelæ RQ, & TS. Dico rectangulum MV, VO lineę OM secantis conicam figuram in O, & M esse ad rectangulum MI, IO, vt rectangulum TV, VS ad rectangulum RI, IQ parallelarum.



Probatur. Rectangulum LV, & VK ex propos. 35. lib. 3. Eucl. est æquale rectangulo TV, & VS ob eundem circulum, in quo se intersecant; & eadem ratione PI, & ID æquatur rectangulo RI, & IQ; Sed vt PI ad LV; sic est IM ad VM, ob parallelismum in triangulo eodem IMP, & vt ID ad VK, sic OI ad VO ob parallelas in triangulo codē KOV, ergo si cōponātur proportiones, & fiant rectangula, ita erit rectangulum ex PI, & ID ad rectangulum LV, & VK, vt IM, & OI rectangulum ad rectangulum ex MV, & VO, vt hic vides.

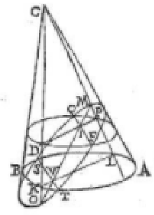


PI	vt	IM	&	ID	vt	OI
ad		ad		ad		ad
LV		MV		VK		VO

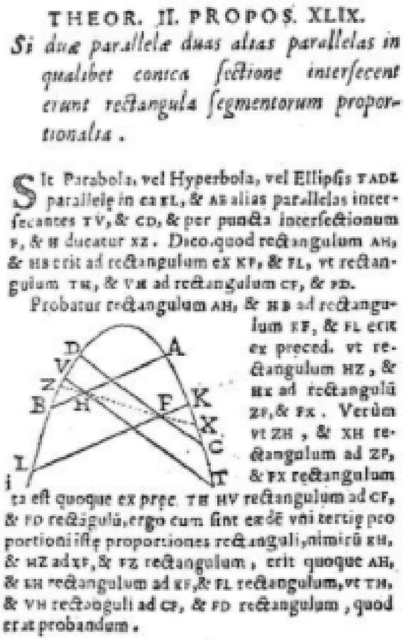
Ergo compositum, vt compositum.

	PI	&	ID	IM	&	OI
Erit	ad compositum			ad compositum.		
	LV	&	VK	MV	&	VO

Quare etiam rectangulum RI, & IQ erit ad rectangulum TV, & VS, vt rectangulum MI, & OI ad rectangulum MV, & VO, quod erat probandum. Quod verò sectio V. g. MTOS parabolę, & MO sectio in ea, & latus trianguli MC conueniant in M patet. Nam cum sit planum TOS parabolę, cruri AC parallelum non erit parallelum cruri CM. Vnde conueniet, cum eo crure CM; sed illud est in superficie coni. Ergo conueniet cum eo in superficie coni. Sed puncta plani parabolici in superficie coni sunt ipsa linea flexa parabola. Ergo ipsa in M incidet; sed sectio MO est in plano parabolę, & in plano trianguli, cū sit eorū communis sectio. Ergo ibi debebit esse vbi planum parabolę cruris trianguli coniungūtur in M scilicet in ipsa flexa SOTM.



In Ellipsi patet; quia si secat latera trianguli CBA per axem; tantò magis, & reliquorum triangulorum minorum intra conum ductorum. In Hyperbola CM crus potest non conuenire cum sectionis SOTM plano, sed neque secabit Hyperbolam altero extremo M; quod requiritur in propos. Siquidem si sectio OM conueniret cum Hyperbola etiam contra Thesim cum MC conueniret; quia totius trianguli KCL, cuius sectio est, & plani Hyperbolici, tantùm crura, vtpote sectiones superficiei conicę in superficie conica sunt. Nota verò, quod sectio OM potest etiam secare axem, vt dedimus exemplum in Hyperbola.



THEOR. II. PROPOS. XLIX.

Si duæ parallelæ duas alias parallelas in qualibet conica sectione intersecent erunt rectangula segmentorum proportionalia.

Sit Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis TADE parallelę in ea EL, & AB alias parallelas intersecantes TV, & CD, & per puncta intersectionum F, & H ducatur XZ. Dico quod rectangulum AH, & HB erit ad rectangulum ex KF, & FL, vt rectangulum TH, & VH ad rectangulum CF, & FD.

Probatur rectangulum AH, & HB ad rectangulum KF, & FL erit ex preced. vt rectangulum HZ, & HX ad rectangulũ ZF, & FX. Verùm vt ZH, & XH rectangulum ad ZF, & FX rectangulum ta est quoque ex prec. TH HV rectangulum ad CF, & FD rectãgulũ, ergo cum sint eædẽ vni tertię proportioni istę proportiones rectanguli, nimirũ XH, & HZ ad XF, & FZ rectangulum, erit quoque AH, & BH rectangulum ad KF, & FL rectangulum, vt TH, & VH rectanguli ad CF, & FD rectangulum, quod erat probandum.

Figura 10: Dimostrazioni del teorema delle corde dall'opera *Euclides Adauctus*.

Note

1. *Euclides adauctus et methodicus mathematicaque universalis Caroli Emanueli II Sabaudiae duci Pedemontium Principi Regi Cypri etc. dicata, quae ne dum propositionum dependentiam, sed et rerum ordinem observat. Et complectitur eaomnia, quae de quantitate tum discreta, tum continua abstracta speculari queunt. Resectis superfluis demonstrationibus, et requisitis omnibus profuse coadunatis. Singuli quoque Tractatus novis propositionibus adaucti sunt, et aliqui etiam exintegro adornati. Omnesque tum figuris, tum verbis clare, dilucideque propositi.*

2. *Siquidem ex meo labori didici, cuius pretij, cuius utilitatis id operis emergat, quod ea omnia quae Mathematicas luces et evidentias in unicum lucis fontem adeoque solem ne dum tumultuaria collectione aglomeret, sed etiam ordinato agmine disponat in seriesque suas naturali consecutione distinguat praecipue illis qui nullo Mercurio tramitis indice aut duce audent se huic studio consignare et admodum dificilem provinciam in suam sarcinam traducere. [Guarini 1671: Benevolo Lectori, pg.1].*

3. *On y remarque surtout une démonstration extrêmement simple, et qui s'applique aux trois sections coniques en même temps, de la propriété du rapport constant des produits des segments faits sur les cordes parallèles, qui avait toujours exigé la connaissance de plusieurs propositions préliminaires.*

Riferimenti bibliografici

- Guarino Guarini, *Euclides adauctus et methodicus mathematicaque universalis*, Torino, 1671.
- Alessandra Fiocca, Andrea Del Centina, *The chords theorem recalled to life at the turn of the eighteenth century*, Historia Mathematica, in corso di pubblicazione.
- Clara Silvia Roero, *Guarino Guarini and Universal Mathematics.* Nexus Network Journal, Vol. 11, 2009.
- Nicoletta Marconi, Dizionario Biografico degli Italiani, Volume 60, 2003.
- F. G. Tricomi *Guarini matematico* in *Guarino Guarini e l'internazionalità del Barocco*, Atti del convegno internazionale promosso dall'accademia delle scienze di Torino. 30 settembre - 5 ottobre 1968.
- Carl B. Boyer, *Storia della matematica.*

Sitografia

- https://matematica.unibocconi.it/articoli/guarino-guarini-architetto-e-matematico
- http://dm.unife.it/storia/Apolloni.htm